수리모형과 미분방정식

2016년 2학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점처리 됩니다.
- 답이 맞더라도 풀이과정이 없거나 틀리면 감점됩니다.
- 만점은 100점입니다.

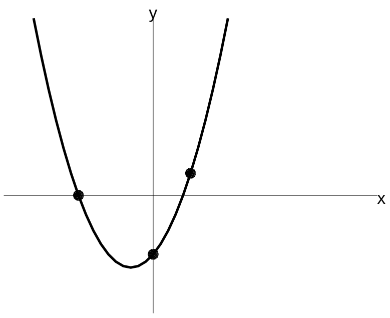
1. $\boxed{30\text{점}}$ Secant method는 가장 최근에 구한 <u>두 개</u>의 numerical solutions인 x_{i-1}과 x_i를 지나는 degree가 1인 interpolating polynomial을 이용하여 $f(x)$를 approximation하는 방법이라고 볼 수 있다. 이러한 아이디어를 확장하여, 아래 (그림1) 처럼 가장 최근에 구한 <u>세 개</u>의 numerical solutions인

$$(x_{i-2}, f(x_{i-2})), \quad (x_{i-1}, f(x_{i-1})), \quad (x_i, f(x_i))$$

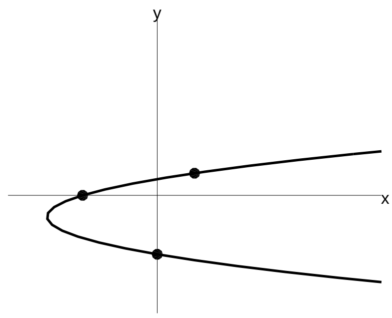
를 지나는 interpolating polynomial $g(x)$로 $f(x)$를 approximation하여

$$f(x) = 0$$

의 root(solution)을 approximation하는 방법을 생각해 보자.



(그림1) $y = g(x)$



(그림2) $x = h(y)$

(a) $\boxed{10\text{점}}$ 위에서 제안한 방법으로 “$f(x) = 0$”의 solution을 구하려고 할 때 생기는 문제점은 어떠한 것들이 있겠는가? 본인이 생각하는 문제점을 모두 답하라.

(b) $\boxed{10\text{점}}$ (a)에서 답한 문제점들을 해결하기 위해, $y = g(x)$ 형태의 polynomial이 아닌, (그림2)와 같은 $x = h(y)$ 형태의, 즉 y에 대한 함수 형태의 interpolating polynomial로 approximation 해보도록 하자. 이 때 $h(y)$를 구하라.

(c) $\boxed{10\text{점}}$ (b)에서 구한 $h(y)$를 이용하여, 정확하게는 $h^{-1}(x)$를 이용하여 $f(x)$를 approximation한 후 새로운 numerical solution x_{i+1}을 구하라. 즉, x_{i+1}을 x_{i-2}, x_{i-1}, x_i으로 나타내라.

Solution:

(a)
1. Solution이 없을 수 있다.
2. Solution이 두 개 있을 수 있다.
3. Solution을 계산하는 것이 복잡하다. (square root 사용 등)

(b) interpolating polynomial of $(f(x_{i-2}), x_{i-2})$, $(f(x_{i-1}), x_{i-1})$, $(f(x_i), x_i)$.
Let $y_{i-2} := f(x_{i-2})$, $y_{i-1} := f(x_{i-1})$, $y_i := f(x_i)$.

$$h(y) = \frac{(y - y_{i-1})(y - y_i)}{(y_{i-2} - y_{i-1})(y_{i-2} - y_i)} x_{i-2} + \frac{(y - y_{i-2})(y - y_i)}{(y_{i-1} - y_{i-2})(y_{i-1} - y_i)} x_{i-1} + \frac{(y - y_{i-2})(y - y_{i-1})}{(y_i - y_{i-2})(y_i - y_{i-1})} x_i$$

(c)

$$x_{i+1} = h(0) = \frac{y_{i-1}y_i}{(y_{i-2}-y_{i-1})(y_{i-2}-y_i)}x_{i-2} + \frac{y_{i-2}y_i}{(y_{i-1}-y_{i-2})(y_{i-1}-y_i)}x_{i-1} + \frac{y_{i-2}y_{i-1}}{(y_i-y_{i-2})(y_i-y_{i-1})}x_i$$

2. $\boxed{20점}$ 다음 네 개의 점을 지나는 interpolating polynomial을 다음 두 방법으로 각각 구하라.

$$(-1,1),\quad (1,2),\quad (2,-1),\quad (5,2)$$

(a) $\boxed{10점}$ Lagrange method

(b) $\boxed{10점}$ Newton method

Solution:

(a)

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-5)}1+\frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(1+1)(1-2)(1-5)}2+\frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(2+1)(2-1)(2-5)}(-1)$$
$$+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(5+1)(5-1)(5-2)}2$$
$$=-\frac{1}{36}(x-1)(x-2)(x-5)+\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-5)+\frac{1}{9}(x+1)(x-1)(x-5)$$
$$+\frac{1}{36}(x+1)(x-1)(x-2)$$

(b)

-1	1	(2-1)/(1+1)=1/2	(-3-1/2)/(2+1)=-7/6	(1+7/6)/5+1)=13/36
1	2	(-1-2)/(2-1)=-3	(1+3)/5-1)=1	
2	-1	(2+1)(5-2)=1		
5	2			

The polynomial is

$$1+\frac{1}{2}(x+1)-\frac{7}{6}(x+1)(x-1)+\frac{13}{36}(x+1)(x-1)(x-2)$$

3. $\boxed{50\text{점}}$ 다음과 같은 5개의 점을 지나는 interpolating cubic spline $f(x)$를 구하고자 한다.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$$

이러한 cubic spline을 구할 때, 일반적으로 마지막에 필요한 두 개의 조건을 다음과 같이 추가하고 이렇게 얻은 결과를 natural cubic spline이라고 한다.

$$f''(x_1) = f''(x_5) = 0$$

위 두 조건을 대신하여 다른 조건을 사용하여 cubic spline을 구하는 경우를 생각해 보자. 이 때,

- 계산을 간단하게 하기 위해 데이터들의 x 좌표의 간격은 모두 h로 같다고 가정하자. 즉, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = h$이다. $(h > 0)$
- 아래 문제의 (a)와 (b) 모두 unknown variable은 $f''(x_1), \ldots, f''(x_5)$이 되도록 한다.
- Linear system의 matrix 크기는 5×5 이하의 크기여야 하고 되도록 작게 만들도록 하라.
- Linear system을 구할 때는 좌변의 matrix와 우변의 constant vector를 모두 구해야 한다.
- Matrix와 constant vector는 모두 문제에서 주어진 상수들

$$h, x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$$

로 표현해야 한다.

(a) $\boxed{20\text{점}}$ 위 natural cubic spline의 조건 대신 다음과 같은 두 조건을 사용하였을 때 cubic spline을 얻기 위해 만들어지는 linear system을 구하라.

$$f'(x_1) = f'(x_5) = 0$$

(b) $\boxed{20\text{점}}$ 위 natural cubic spline의 조건 대신 다음과 같은 두 조건을 사용하였을 때 cubic spline을 얻기 위해 만들어지는 linear system을 구하라.

$$f'(x_1) = f''(x_1) = 0$$

(c) $\boxed{10\text{점}}$ 5개의 데이터가 순서대로 아래와 같이 주어졌을 때, 위 (b)의 조건을 사용하였을 때 interpolating cubic spline $f(x)$의 $f''(x_1), \ldots, f''(x_5)$를 모두 구하라.

$$(1, 0), \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right), (4, 0), \left(5, -\frac{1}{6}\right)$$

Hint:
Lecture slide에서 Lagrange formula로부터 cubic spline을 얻는 linear system을 유도하는 과정에서 얻게 되는 식들을 이용하라. 특히 $f_i'(x)$에 대한 식에 주목하라.

Solution: Let $a_i := f''(x_i)$.

(a) From the slide,

$$\begin{aligned} f_i'(x_{i+1}) &= \frac{x_{i+1}-x_i}{6} f''(x_i) + \frac{x_{i+1}-x_i}{3} f''(x_{i+1}) + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \\ &= \frac{h}{6}a_i + \frac{h}{3}a_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_i'(x_i) &= -\frac{x_{i+1}-x_i}{3} f''(x_i) - \frac{x_{i+1}-x_i}{6} f''(x_{i+1}) + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \\ &= -\frac{h}{3}a_i - \frac{h}{6}a_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h} \end{aligned}$$

(i) At $x = x_1$, by the formula for $f_i'(x_i)$,

$$\begin{aligned} f_1'(x_1) &= -\frac{h}{3}a_1 - \frac{h}{6}a_2 + \frac{y_2-y_1}{h} \\ \to & 2ha_1 + ha_2 = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h} - f_1'(x_1)\right) \end{aligned}$$

(ii) At $x = x_5$, by the formula for $f_i'(x_{i+1})$,

$$\begin{aligned} f_4'(x_5) &= \frac{h}{6}a_4 + \frac{h}{3}a_5 + \frac{y_5-y_4}{h} \\ \to & ha_4 + 2ha_5 = 6\left(-\frac{y_5-y_4}{h} + f_4'(x_5)\right) \end{aligned}$$

(iii) At $x = x_2, x_3, x_4$, from the slide, $(2 \le i \le 4)$

$$\begin{aligned} &(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1}-x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1}-x_i)f''(x_{i+1}) \\ &= 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right] \\ \to & ha_{i-1} + 4ha_i + ha_{i+1} = \frac{6}{h}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \end{aligned}$$

Summing up, we get the linear system

$$\begin{bmatrix} 2h & h & & & \\ h & 4h & h & & \\ & h & 4h & h & \\ & & h & 4h & h \\ & & & h & 2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ y_4 - y_5 \end{bmatrix}$$

or, applying

$$\begin{aligned} ha_1 &= -\frac{h}{2}a_2 + \frac{3}{h}(y_2 - y_1) \\ ha_5 &= -\frac{h}{2}a_4 + \frac{3}{h}(y_4 - y_5) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (7/2)h & h & \\ h & 4h & h \\ & h & (7/2)h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{bmatrix} 2(y_1 - 2y_2 + y_3) - (y_2 - y_1) \\ 2(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ 2(y_3 - 2y_4 + y_5) - (y_4 - y_5) \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{bmatrix} 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 \\ 2(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ 2y_3 - 5y_4 + 3y_5 \end{bmatrix}$$

(b) Since $f'(x_1) = 0$ and $a_1 = f''(x_1) = 0$, from the formula of (i) in (a),

$$ha_2 = 6\frac{y_2 - y_1}{h}$$

Also, from the formula of (iii) in (a),

$$4ha_2 + ha_3 = \frac{6}{h}(y_1 - 2y_2 + y_3).$$

Summing up, we obtain the linear system

$$\begin{bmatrix} h & & & \\ 4h & h & & \\ h & 4h & h & \\ & h & 4h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \end{bmatrix}$$

or, applying $ha_2 = \frac{6}{h}(y_2 - y_1)$,

$$\begin{bmatrix} h & & \\ 4h & h & \\ h & 4h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 - 4(y_2 - y_1) \\ y_2 - 2y_3 + y_4 - (y_2 - y_1) \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} 5y_1 - 6y_2 + y_3 \\ y_1 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$(1, 0), (2, 1/3), (3, 1/2), (4, 0), (5, -1/6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(y_2 - y_1) \\ 6(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ 6(y_4 - 2y_3 + y_2) \\ 6(y_5 - 2y_4 + y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(1/3 - 0) = 2 \\ 6(1/2 - 2(1/3) + 0) = -1 \\ 6(0 - 2(1/2) + 1/3) = -4 \\ 6(-1/6 - 2 \cdot 0 + 1/2) = 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= a_1 = 0 \\ f''(x_2) &= a_2 = 2 \\ f''(x_3) &= a_3 = -1 - 4a_2 = -9 \\ f''(x_4) &= a_4 = -4 - a_2 - 4a_3 = -4 - 2 + 36 = 30 \\ f''(x_5) &= a_5 = 2 - a_3 - 4a_4 = 2 + 9 - 120 = -109 \end{aligned}$$