수리모형과 미분방정식

2016년 2학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점처리 됩니다.
- 답이 맞더라도 풀이과정이 없거나 틀리면 감점됩니다.
- 만점은 100점입니다.

1. $\boxed{10\text{점}}$ 2nd-derivative의 three-point central difference formula의 truncation error가 다음과 같음을 보여라. $(x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1})$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} - \frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2$$

위에서 $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ 이다.

Solution:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_i)(x - x_i)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_i)^4$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{1}{2!}f''(x_i)h^2 - \frac{1}{3!}f'''(x_i)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)h^4$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2!}f''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_i)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)h^4$$

$$f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) = 2f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \frac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^4$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} - \frac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^2$$

2. $\boxed{40\text{점}}$ 다음 적분을 numerical method로 구하는 방법을 고려해 보자.

$$\int_a^b f(x)dx$$

(a) $\boxed{20\text{점}}$ Simpson's 1/3 method의 truncation error는 $O(h^5)$ 임을 보여라. 즉, 다음을 보여라.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + O(h^5)$$

(b) $\boxed{20\text{점}}$ 구간 $[a, b]$를 N개의 subinterval로 나누었을 때 각 subinterval의 길이를 h라고 하자. 즉, $h = (b-a)/N$이다. 이 때 N이 짝수라고 할 때 Composite Simpson's 1/3 method로 구한 적분값의 truncation error는 다음과 같음을 보여라.

$$-\frac{(b-a)}{180}\overline{f^{(4)}}h^4$$

위에서 $\overline{f^{(4)}}$은 구간 $[a, b]$에서 $f^{(4)}(x)$의 <u>대략적인 평균값</u>을 나타낸다.

Solution:

(a) The Taylor expansion at $c := (a+b)/2$ is

$$f(x) = f(x_i) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-c)^4$$

where $a \le \xi \le b$.

With $h := (b-a)/2 = b - c = c - a$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx =& \Big[f(c) + \frac{1}{2}f'(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f''(c)(x-c)^3 + \frac{1}{4!}f'''(c)(x-c)^4 + \frac{1}{5!}f^{(4)}(\xi)(x-c)\\ =& 2hf(c) + \frac{2h^3}{3!}f''(c) + \frac{2h^5}{5!}f^{(4)}(\xi)\end{aligned}$$

Replacing

$$f''(c) = \frac{f(a) - 2f(c) + f(b)}{h^2} - \frac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^2$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= 2hf(c) + \frac{2h^3}{3!}\left(\frac{f(a) - 2f(c) + f(b)}{h^2} - \frac{2}{4!}f^{(4)}(\xi)h^2\right) + \frac{2h^5}{5!}f^{(4)}(c)\\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right) + \left(-\frac{1}{36} + \frac{2}{120}\right)f^{(4)}(\xi)h^5\\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right) - \frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5\end{aligned}$$

(b) For a subinterval $[x_{i-1}, x_{i+1}]$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right) - \frac{1}{90}f^{(4)}(\xi_i)h^5$$

where $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_{i+1}$. Let $\overline{f^{(4)}}$ be the average 4-th derivative in $[a, b]$ defined as

$$\overline{f^{(4)}} \approx \frac{\sum_{i=2,4,\ldots}^{N} f^{(4)}(\xi_i)}{N/2}$$

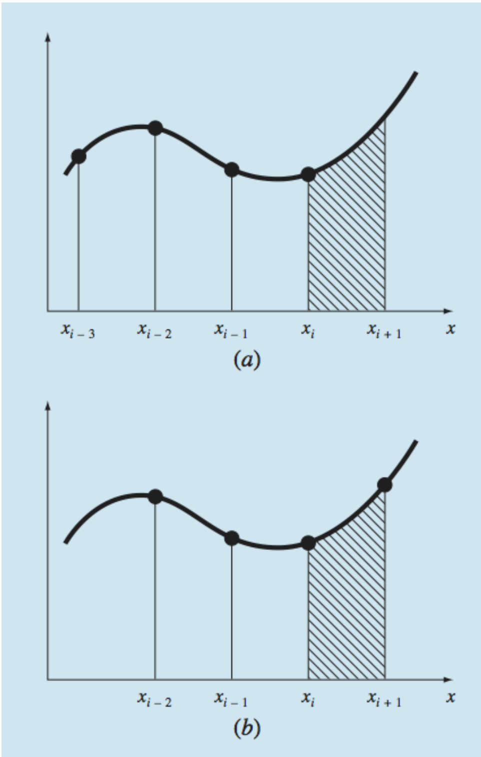
Since $h = (b-a)/N$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2,4,\ldots}^{N}\left(-\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi_i)h^5\right) &= -\frac{h^5}{90}\sum_{i=2,4,\ldots}^{N} f^{(4)}(\xi_i) \\
&= -\frac{h^5}{90}\frac{N}{2}\overline{f^{(4)}} \\
&= -\frac{h^5}{90}\frac{b-a}{2h}\overline{f^{(4)}} \\
&= -\frac{(b-a)}{180}\overline{f^{(4)}}h^4
\end{aligned}$$

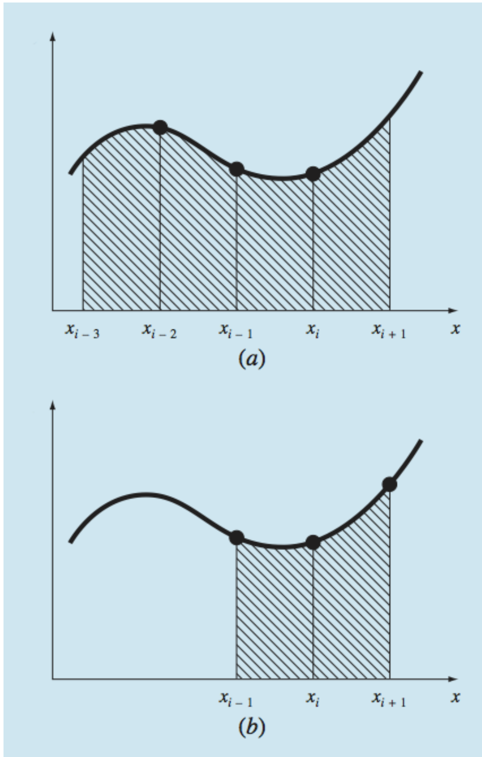
3. $\boxed{30\text{점}}$ Adams-Bashforth method와 (이하 A-S method) Adams-Moulton method는 (이하 A-M method) 각각 (그림1)과 같은 방법으로

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

를 approximation하여 유도한 방법이라고 할 수 있다.



(그림1)



(그림2)

즉, order n인 경우, A-B method는 x_{i+1}을 포함하지 않은 최근 n개의 점을, A-M method는 x_{i+1}을 포함한 최근 n개의 점을 지나는 degree $n-1$인 interpolating polynomial을 이용하여 해당 integral을 구하여 유도할 수 있다.

여기서는 다른 방법을 고려해 보자. Open Newton-Cotes method와 Closed Newton-Cotes method는 마찬가지로 n개의 점을 지나는 degree $n-1$인 interpolating polynomial을 구하여 integral을 구하는 방법이다. 위 (그림2a)와 (그림2b)는 각각 Open Newton-Cotes method와 Closed Newton-Cotes method를 이용하여 빗금친 영역의 integral을 구하는 방법을 보여준다.

(a) $\boxed{15\text{점}}$ 3rd order open Newton-Cotes method를 이용하여 1st-order ODE의 solution을 구하는 Multistep method의 공식을 구하라. ((그림2a) 참조)

(b) $\boxed{15\text{점}}$ 3rd order closed Newton-Cotes method를 이용하여 1st-order ODE의 solution을 구하는 Multistep method의 공식을 구하라. ((그림2b) 참조)

주의 : 여기서 유도하는 방법은 y_{i+1}을 아래와 같이 구할 때

$$y_{i+1} = y_k + Slope \cdot Step$$

y_k가 y_i와 다를 수도 있음에 유의하라.

Solution: Let $f_i := f(x_i, y_i) = f(x_i, y(x_i))$.

(a) Let $g(x)$ be the polynomial interpolating the points

$$(x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i).$$

Clearly,

$$\int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} g(x)dx = \int_0^{4h} g(x + x_{i-3})dx.$$

Let $h(x) := g(x + x_{i-3})$. Then,

$$h(x) = a_1 + a_2(x-h) + a_3(x-h)(x-2h)$$

where

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{i-2} \\ a_2 &= (f_{i-1} - f_{i-2})/h \\ a_3 &= (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})/2h^2 \end{aligned}$$

(i)

$$\int_0^{4h} (x-h)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - hx\right]_0^{4h} = 8h^2 - 4h^2 = 4h^2$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^{4h} (x-h)(x-2h)dx = \int_0^{4h} (x^2 - 3hx + 2h^2)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}hx^2 + 2h^2x\right]_0^{4h} \\ &= \frac{64}{3}h^3 - 24h^3 + 8h^3 = \frac{16}{3}h^3 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \int_0^{4h} h(x)dx &= a_1(4h) + a_2(4h^2) + a_3\frac{16}{3}h^3 \\ &= f_{i-2}(4h) + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h}(4h^2) + \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{2h^2}\frac{16}{3}h^3 \\ &= \left(4 - 4 + \frac{8}{3}\right)hf_{i-2} + \left(4 - \frac{16}{3}\right)hf_{i-1} + \frac{8}{3}hf_i \\ &= \left(\frac{8}{3}f_{i-2} - \frac{4}{3}f_{i-1} + \frac{8}{3}f_i\right)h \end{aligned}$$

Summing up, the formula is

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_{i-3} + \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} g(x)dx \\ &= y_{i-3} + \frac{4}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)h. \end{aligned}$$

(b) Let $g(x)$ be the polynomial interpolating the points

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}).$$

Clearly,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)dx = \int_0^{2h} g(x + x_{i-1})dx.$$

Let $h(x) := g(x + x_{i-1})$. Then,

$$h(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x(x - h)$$

where

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{i-1} \\ a_2 &= (f_i - f_{i-1})/h \\ a_3 &= (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/2h^2 \end{aligned}$$

(i)

$$\int_0^{2h} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2h} = 2h^2$$

(ii)

$$\int_0^{2h} x(x-h)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2\right]_0^{2h} = \frac{8}{3}h^3 - 2h^3 = \frac{2}{3}h^3$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \int_0^{2h} h(x)dx &= a_1(2h) + a_2(2h^2) + a_3\frac{2}{3}h^3 \\ &= f_{i-1}(2h) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(2h^2) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}\frac{2}{3}h^3 \\ &= \left(2 - 2 + \frac{1}{3}\right)hf_{i-1} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)hf_i + \frac{1}{3}hf_{i+1} \\ &= \left(\frac{1}{3}f_{i-1} + \frac{4}{3}f_i + \frac{1}{3}f_{i+1}\right)h. \end{aligned}$$

Summing up,

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)dx = y_{i-1} + \frac{1}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})h$$

4. $\boxed{20\text{점}}$ Finite difference method를 사용하여 다음 boundary-value problem의 solution을 구하는 것을 생각해 보자.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 4y - 3 = 0$$

boundary condition:

$$y'(0) = 1 \text{ 그리고 } y'(3) = 4.$$

이 때, 구간 $[0, 3/2]$을 길이가 $h = 1/2$인 subinterval로 나누고, truncation error가 $O(h^2)$인 finite differen method를 이용해 numerical solution을 구하려고 한다. 이렇게 구한 numerical solution으로부터 얻을 수 있는 $y(1/2)$과 $y(1)$의 값은 무엇인가?

(단, finite difference formula를 사용할 경우 가능하다면 central difference formula를 쓰도록 한다.)

Solution:

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 4y_i = 3 \\
&\to 4(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_{i-1}) + 4y_i = 3 \\
&\to 3y_{i-1} - 4y_i + 5y_{i+1} = 3
\end{aligned}$$

At $x = 0$,

$$\frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2h} = 1 \to -3y_1 + 4y_2 - y_3 = 1$$

At $y = 3$,

$$\frac{y_2 - 4y_3 + 3y_4}{2h} = 4 \to y_2 - 4y_3 + 3y_4 = 4$$

Summing up, we obtain a linear system

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & \\ 3 & -4 & 5 & \\ & 3 & -4 & 5 \\ & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

The solution is

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -19/4 \\ 1 \\ 17/4 \end{bmatrix}$$