선형대수

2014년 1학기

중간고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 처음부터 모든 문제를 풀지 말고, 문제를 모두 훑어본 후 풀 수 있다고 생각되는 문제부터 풀 것을 권장합니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.
- 강의시간에 배운 범위안의 내용에만 근거해서 답변해야 합니다. 예를 들어, 아직 배우지 않은 내용을 근거로 답하는 경우, 맞더라도 감점이 됩니다.

1. $\boxed{80점}$ 3차원 공간상의 unit vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

(주의 : $\mathbf{u}$는 unit vector이므로 a, b, c가 모두 0이 될 수는 없다. 하지만 셋 중 하나 혹은 둘은 0이 될 수 있음을 명심하라.)

3×3 matrix A는 다음과 같이 정의되어 있다.

$$A = \mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

또한, A의 세 column을 각각 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$라고 하자. 즉,

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \right]$$

(a) $\boxed{10점}$ 임의의 vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$를 $\mathbf{u}$에 projection하는 transformation인 $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$를 생각해 보자. 이러한 transformation은 위 matrix A에 의해 표현될 수 있음을 보여라. 즉, $\mathbf{x}$를 column vector로 표현할 경우, 다음 equality가 성립함을 보여라.

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

(b) $\boxed{15점}$ A는 invertible한가? invertible한 경우 inverse matrix를 구하고, 그렇지 않을 경우 invertible하지 않음을 증명하라.

(c) $\boxed{15점}$ $\mathrm{rank}(A)$를 구하라.

(d) $\boxed{10점}$ $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$를 구체적으로 구하라.

(e) $\boxed{10점}$ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$는 linearly independent한가? 본인의 답변을 증명하라.

(f) $\boxed{20점}$ A의 P^TLU factorization을 구하라.

Solution:

(a)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right)\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u}$$

(b) 다음과 같은 linear system을 생각해 보자. ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$A\mathbf{x}$는 $\mathbf{x}$를 $\mathbf{u}$에 projection하여 얻은 vector이므로 항상 $\mathbf{u}$와 평행하다. 따라서 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{u}$와 평행하지 않을 경우 위 linear system은 solution을 가질 수 없다. 그러므로 fundamental theorem에 의해 A는 invertible하지 않다.

(c) 아래 (f)에 의해 $\text{rank}(A) = 1$.

(d) 임의의 vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$에 대해,

$$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x})$$

따라서

$$\text{span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = k\mathbf{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(e) (f)에 의해, homogeneous linear system

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

는 nontrivial solution을 갖는다. 따라서 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$는 linearly dependent하다.

(f)

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

- $a \neq 0$일 경우

$$A \xrightarrow{R_2-(b/a)R_1} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(c/a)R_1} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/a & 1 & 0 \\ c/a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $b \neq 0$일 경우

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ a^2 & ab & ac \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-(a/b)R_1} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(c/b)R_1} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a/b & 1 & 0 \\ c/b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & b^2 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $c \neq 0$일 경우

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ ab & b^2 & bc \\ a^2 & ab & ac \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-(b/c)R_1} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & ab & ac \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(a/c)R_1} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & 1 & 0 \\ a/c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac & bc & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $\boxed{20점}$ n 개의 n-dimensional unit vector가 있다.

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n.$$

모든 vector들은 서로 orthogonal하다. 즉, 임의의 서로 다른 두 vector $\mathbf{u}_i$ 와 $\mathbf{u}_j (i \neq j)$ 는 서로 orthogonal하다.

위 vector들을 column으로 하여 만들어진 matrix를 A 라고 하자.

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_{n-1} & \mathbf{u}_n \end{array} \right]$$

이 때, 아래 관계가 성립함을 보여라.

$$A^{-1} = A^T$$

Solution: 주어진 성질에 의해,

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

이다.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{u}_1 & \ldots & \mathbf{u}_n \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = I$$

따라서 $A^{-1} = A^T$.