선형대수

2013년 1학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- **시험지는 앞/뒤로 인쇄되어 있으니 유의하시기 바랍니다.**
- 만점은 100점입니다.
- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점 처리 됩니다.
- 교재에 있는 theorem을 이용할 경우, 해당 theorem을 증명할 필요 없이 어떤 theorem인지를 밝히고 이용하여도 좋습니다.

1. $\boxed{70점}$ 3차원 공간 상에 unit vector $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$가 있다고 하자. ($\|\mathbf{d}\| = 1$) 이 때, $\mathbf{d}$는 그림과 같이 두 angle α와 β를 사용해 정의할 수 있다. 즉, $\mathbf{d}$는 standard unit vector인 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$을 y축을 중심으로 시계방향으로 α $(-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$ 만큼 (즉, 반시계방향으로 $-\alpha$ 만큼) 회전한 후 (그림1), 다시 z축을 중심으로 반시계방향으로 $\beta(0 \leqslant \beta < 2\pi)$ 만큼 회전함으로써 (그림2) 얻을 수 있다. 다시 말해,

- y축을 중심으로 시계방향으로 (방향에 주의할 것!) α 만큼 회전하는 linear transformation의 standard matrix를 A라고 하고, (그림1)
- z축을 중심으로 반시계방향으로 β 만큼 회전하는 linear transformation의 standard matrix를 B라고 할 때, (그림2)

다음이 성립한다.

$$\mathbf{d} = BA\mathbf{e}_1.$$

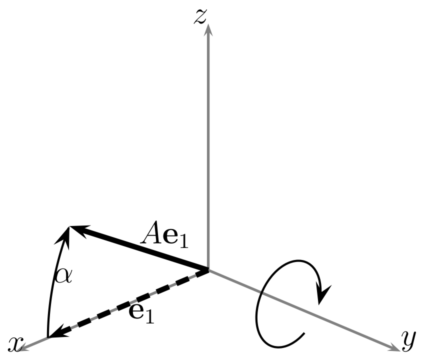

그림 1

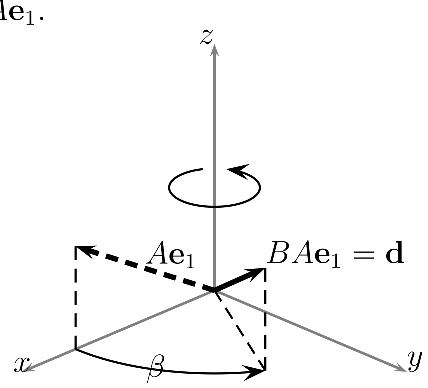

그림 2

$\mathbf{d}$가 direction vector이고 원점을 지나는 line을 ℓ이라 하자. ℓ로 orthogonal하게 projection하는 linear transformation의 standard matrix를 P라고 하자. 즉,

$$P\mathbf{x} = \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}).$$

> 3차원 공간에서 y축 및 z축을 중심으로 반시계방향으로 θ만큼 회전하는 linear transformation은 각각 다음과 같다.
>
> $$y\text{축을 중심으로 반시계방향으로 } \theta \text{만큼 회전}: \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$
>
> $$z\text{축을 중심으로 반시계방향으로 } \theta \text{만큼 회전}: \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\boxed{20점}$ x축에 orthogonal하게 projection하는 linear transformation의 standard matrix를 C라고 할 때, 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$P = BACA^{-1}B^{-1}$$

(b) $\boxed{10점}$ α와 β, 그리고 삼각함수만을 사용하여 P를 나타내라. (여러 matrix의 곱이 아닌, 하나의 matrix로 나타내야 한다.)

(c) $\boxed{10\text{점}}$ P의 모든 eigenvalue 및 각 eigenvalue의 algebraic multiplicity와 geometric multiplicity를 모두 구하라.

(d) $\boxed{15\text{점}}$ 각 eigenvalue에 해당하는 eigenspace의 basis를 각각 구하라.

(e) $\boxed{15\text{점}}$ P는 diagonalizable한가? 그렇다면 diagonalization하라. 다시 말해, $P = QDQ^{-1}$의 D와 Q를 구하라. (D는 diagonal matrix)

Solution:

(a) We can easily show that A and B are both orthogonal therefore AB is also orthogonal. Since

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and $C = C^2 = CC^T$, we get

$$BACA^{-1}B^{-1} = BAC(BA)^{-1} = BAC(BA)^T = BACC^T(BA)^T = BAC(BAC)^T.$$

With

$$A = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

we get

$$\begin{aligned} BAC &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & 0 & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} BAC(BAC)^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & 0 & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & 0 & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\cos\alpha = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \sin\alpha = d_3 \cos\beta = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \text{ and } \sin\beta = \frac{d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}.$$

Therefore,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

therefore

$$BAC(BAC)^T = \mathbf{d}\mathbf{d}^T = P.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\cos^2\beta & \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta & \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta \\ \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta & \cos^2\alpha\sin^2\beta & \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

(c) From (e), we know that the diagonal entries of C, 1 and 0, are the eigenvalues with their algebraic multiplicities 2 and 1, respectively.

Moreover, P is diagonalizable. Therefore, their geometric multiplicities are the same with their algebraic multiplicities.

(d) From (e) we know the corresponding columns of BA can form a basis. Since

$$BA = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \end{bmatrix}\right) \text{ and } E_0 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \end{bmatrix}\right)$$

(e)

$$P = BACA^{-1}B^{-1} = (BA)C(BA)^{-1}.$$

Since C is diagonal, P is diagonalizable with $D = C$ and $Q = BA$.

2. $\boxed{30\text{점}}$ $n \times n$ 크기의 square matrix A의 diagonal entry들을 모두 더한 값을 $\mathrm{tr}\,(A)$ 라 한다. 즉, A의 i번째 row, j번째 column의 entry를 a_{ij}라 할 때,

$$\mathrm{tr}\,(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) $\boxed{15\text{점}}$ $n \times m$ 크기의 matrix A와 $m \times n$크기의 matrix B가 있다. 이 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$$

(b) $\boxed{15\text{점}}$ Diagonalizable한 $n \times n$ 크기의 matrix A가 있다. (중복을 포함하여) A의 모든 eigenvalue가 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$이라고 하자. 이 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\mathrm{tr}\,(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

(Hint: (a)의 등식을 활용해 보라.)

Solution:

(a) By the definition of matrix multiplication,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

therefore

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lk} b_{kl}. \right)$$

On the other hand,

$$\mathrm{tr}\,(BA) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{lk} a_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kl} b_{lk} \right).$$

Therefore $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

(b) Let

$$A = PDP^{-1}$$

where

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

then

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A) &= \mathrm{tr}\left(PDP^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((PD)P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}(PD)\right) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}PD\right) \\ &= \mathrm{tr}\,(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n. \end{aligned}$$