수리모형과 미분방정식

2012년 2학기

기말고사

서울시립대학교
컴퓨터과학부

주의사항

- 부정행위가 발각되면 즉시 시험지가 압수되고 0점처리 됩니다.
- 만점은 100점입니다.

1. $\boxed{30\text{점}}$ 다음 initial-value problem의 solution을 numerical method를 이용해서 구하는 방법을 생각해 보자.

$$\frac{dy}{dx} = -ky, \quad y(0) = a \qquad (k > 0)$$

아래 각각의 방법으로 solution을 구하는 경우, 어떠한 경우에 solution으로 수렴하는지 다음 세가지 경우 중 찾고, 그 이유를 밝히시오.

- h에 상관없이 항상 수렴하는가?
- h에 상관없이 항상 수렴하지 않는가?
- h가 특정 조건을 만족시킬때 수렴하는가? 만약 그렇다면 그 조건은 무엇인가?

반드시 풀이과정과 함께 답하시오. (답이 맞더라도 풀이과정이 없으면 0 점 처리)

(a) $\boxed{15\text{점}}$ Midpoint method

(b) $\boxed{15\text{점}}$ Second-order Adams-Moulton method

Solution:

(a)

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}\right) h \\
&= y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - ky_i\frac{h}{2}\right) h \\
&= y_i - k\left(y_i - ky_i\frac{h}{2}\right) h \\
&= \left(\frac{(kh)^2}{2} - kh + 1\right) y_i \\
&= \left((kh)^2 - 2kh + 2\right) \frac{y_i}{2}
\end{aligned}$$

Converges when

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(kh)^2 - 2kh + 2}{2}\right| < 1 &\to -2 < (kh-1)^2 + 1 < 2 \\
&\to -3 < (kh-1)^2 < 1 \\
&\to -1 < kh - 1 < 1 \\
&\to 0 < kh < 2 \\
&\to 0 < h < 2/k.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right) \\ &= y_i - \frac{kh}{2}(y_i + y_{i+1}) \\ \left(1 + \frac{kh}{2}\right) y_{i+1} &= \left(1 - \frac{kh}{2}\right) y_i \\ y_{i+1} &= \frac{2-kh}{2+kh} y_i \end{aligned}$$

Since k and h are both positive, $|2 - kh| < |2 + kh|$ and therefore $\left|\frac{2-kh}{2+kh}\right| < 1$.

$\rightarrow$ Converges regardless of h.

2. $\boxed{30\text{점}}$ 다음 질문에 각각 답하시오.

(a) $\boxed{10\text{점}}$ Gauss point의 개수가 1 인 Gauss quadrature formula를 유도하라.

(b) $\boxed{10\text{점}}$ 일반적으로 1st-order ODE의 solution을 구하는 single step explicit method 들은 다음 식의 정적분부분을 어떻게 approximation 하느냐에 따라 유도할 수 있다.

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \quad (x_{i+1} = x_i + h)$$

앞에서 구한, Gauss point의 개수가 1 인 Gauss quadrature를 이용하여 위 식의 정적분을 approximation 하여 얻은 single step explicit method의 formula는 무엇인가? 단, (x_i, y_i) 이외의 점에서의 $y(x)$ 의 값은 Euler's explicit method를 이용하여 approximation 하라. 즉,

$$y(x_i + ch) \approx y_i + cf(x_i, y_i)h, \quad (0 < c \le 1).$$

(c) $\boxed{10\text{점}}$ 앞에서 구한 single step explicit method의 local truncation error는 얼마인가? (만약 기존에 알려진 방법으로부터 error값을 유추할 수 있다면, 그 값을 사용하라.)

Solution:

(a) Since the Gauss points should be located symmetrically, $x_1 = 0$. Since $2n - 1 = 1$,

$$\int_{-1}^{1} dx = 2 = cf(0) = c$$
$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = cf(0) = 0$$

Therefore the formula is

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0).$$

(b) With $g(x) := f(x, y(x))$ and $x_{i+1} = x_i + h$,

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx &= \int_{-1}^{1} g\left(\frac{(x_{i+1} - x_i)t + x_i + x_{i+1}}{2}\right)\frac{x_{i+1} - x_i}{2}dt \\ &= \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{ht + 2x_i + h}{2}\right)dt \\ &\approx hg\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \\ &= y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i + \frac{h}{2})\right) h \\ &\approx y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}\right) h \end{aligned}$$

This is the same as the midpoint method.

(c) Since the derived method is the same as the midpoint method, the local truncation error is $O(h^3)$.

3. $\boxed{25\text{점}}$ 다음 각 numerical method에서 정적분 값을 approximation하기 위해 사용된 interpolation polynomial의 차수 (degree)는 각각 얼마인가? 짧게 이유를 대시오.

   (a) $\boxed{5\text{점}}$ Midpoint method

   (b) $\boxed{5\text{점}}$ Trapezoidal method

   (c) $\boxed{5\text{점}}$ Simpson' s 1/3 method

   (d) $\boxed{5\text{점}}$ Simpson' s 3/8 method

   (e) $\boxed{5\text{점}}$ Gaussian quadrature (n 개의 Gauss points)

Solution:

(a) 0 – approximated by a rectangle

(b) 1 – approximated by a linear polynomial

(c) 2 – approximated by a quadratic polynomial

(d) 3 – approximated by a cubic polynomial

(e) $2n - 1$ – polynomials of degree up to $2n - 1$ are exactly reproduced

4. $\boxed{15\text{점}}$ Finite difference method를 사용하여 다음 boundary-value problem의 solution을 구하는 것을 생각해 보자.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y, \quad y'(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1, \text{ 그리고 } y(1) = 0.$$

이 때, 구간 $[0,1]$을 각각의 길이가 $h = 1/2$인 두 개의 subinterval로 나누고, truncation error가 $O(h^2)$이 되도록 한다고 하자. 이렇게 구한 numerical solution으로부터 얻을 수 있는 $y(1/2)$의 값은 무엇인가?

Solution: From the boundary condition,

$$\begin{aligned} y(1) &= y_3 = 0 \\ y'(0) &\approx \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2h} = -3y_1 + 4y_2 - y_3 = 1 \end{aligned}$$

At y_2,

$$y''(h) \approx \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} = 4(y_1 - 2y_2 + y_3) = 6y_2 \to 2y_1 - 7y_2 + 2y_3 = 0$$

Overall, we get the linear system

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

of which solution is

$$\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$y(1/2) = y_2 = -2/13$$