수리모형과 미분방정식
중간고사

30 Oct. 2009

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \log\|x\| + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

Table 1: List of integrals.

1. **[80점]** 아래 (first order) ordinary differential equation들의 1-parameter family of solution을 각각 **explicit form**으로 ($y = f(x)$의 형태로) 구하라. **만약 1-parameter family of solution으로 구할 수 없는 particular solution이 있다면 그것도 (explicit form으로) 구하라.**

   (a) **[20점]** $y' + y^2 \sin x = 0$

   (b) **[20점]** $y^2 y' + 2xy^3 = 6x$

   (c) **[20점]** $y' = (4x + y)^2$

   (d) **[20점]** $y' = e^{2x} + y - 1$

solution

(a)

$$
\begin{aligned}
& y' + y^2 \sin x = 0 \\
\rightarrow \quad & -y^{-2} dy = \sin x dx \\
\rightarrow \quad & y^{-1} = -\cos x + C \\
\rightarrow \quad & y = \frac{1}{-\cos x + C}
\end{aligned}
$$

Note that $y = 0$ is a particular solution which cannot be obtained by the 1-parameter family of solution.

(b) Let $u = y^3$ or use Bernoulli's eqation method.
Let $u = y^3$ then $du = 3y^2 y'$ and

$$
\begin{aligned}
& y^2 y' + 2xy^3 = 6x \\
\rightarrow \quad & \frac{1}{3} u' + 2xu = 6x \\
\rightarrow \quad & du = 6x(3-u)dx \\
\rightarrow \quad & \frac{du}{u-3} = -6x dx \\
\rightarrow \quad & \log(u-3) = -3x^2 + c_0 \\
\rightarrow \quad & u = Ce^{-3x^2} + 3 \quad (C = e^{c_0}) \\
\rightarrow \quad & y = \left(Ce^{-3x^2} + 3\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

(c) Let $u = 4x + y$ then $du = 4dx + dy$ and

$$
\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = (4x+y)^2 \\
\rightarrow \quad & \frac{du - 4dx}{dx} = u^2 \\
\rightarrow \quad & \frac{du}{dx} - 4 = u^2 \\
\rightarrow \quad & du = (u^2 + 4) dx \\
\rightarrow \quad & \frac{du}{u^2 + 4} = dx \\
\rightarrow \quad & \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} = x + c_0 \\
\rightarrow \quad & \frac{4x + y}{2} = \tan\left(2(x + c_0)\right) \\
\rightarrow \quad & y = -4x + 2\tan(2x + C) \quad (C = 2c_0)
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
& y' = e^{2x} + y - 1 \\
\rightarrow \quad & (e^{2x} + y - 1)dx - dy = 0
\end{aligned}
$$

Since

$$
\frac{\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{1-0}{-1} = -1 =: F(x)
$$

if a function of x, the integrating factor is $h(x) = e^{\int F(x)dx} = e^{\int (-1)dx} = e^{-x}$.

$$
\begin{aligned}
& e^{-x}(e^{2x} + y - 1)dx - e^{-x}dy = 0 \\
\rightarrow \quad & (e^{x} + (y-1)e^{-x})dx - e^{-x}dy = 0
\end{aligned}
$$

The general solution in an implicit form is, with $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y} Q(x,\tilde{y})d\tilde{y} + \int_{x_0}^{x} P(\tilde{x}, y_0)d\tilde{x} &= \int_0^y (-e^{-x})d\tilde{y} + \int_0^x (e^{\tilde{x}} + (0-1)e^{-\tilde{x}})d\tilde{x} \\
&= (-\tilde{y}e^{-x})|_0^y + (e^{\tilde{x}} + e^{-\tilde{x}})|_0^x \\
&= -ye^{-x} + e^{x} + e^{-x} = c_0.
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
& -ye^{-x} + e^{x} + e^{-x} = c_0. \\
\rightarrow \quad & y = Ce^{x} + 1 + e^{2x}. \quad (C = -c_0)
\end{aligned}
$$

2. **[60점]** 다니엘 베르누이(Daniel Bernoulli)는 1760년에 천연두(smallpox) 예방접종(inoculation) 프로그램을 평가(appraising)하기 위한 연구를 수행하였다. 그의 모델은 천연두 이외에도, 병에 걸린 후 (contracted) 죽지 않고 살아남으면 평생 동안 면역력(immunity)이 생기는 모든 질병에 적용된다.

   특정 연도($t = 0$)에 태어난 모든 이들의 집단(confort)를 고려하여 다음을 정의한다.

   - $n(t)$: 이 집단 중 t년 후에 살아남은 이들의 수
   - $x(t)$: 이 집단 중 t년 후까지 천연두에 걸린 적이 없는 사람들의 수
   - β: 천연두에 걸린 적이 없는 사람이 천연두에 걸리게 될 확률
   - ν: 천연두에 걸린 사람이 천연두에 의해 죽을 확률
   - $\mu(t)$: 천연두 이외의 원인에 의해 죽을 확률

   이 때, 천연두에 걸린 적이 없는 사람들의 수가 줄어드는 변화량(dx/dt)은 다음과 같이 주어진다.:

$$\frac{dx}{dt} = -(\beta + \mu(t))x; \tag{1}$$

   위 식 (1)에서 우변의 첫번째 항은 천연두에 걸린 적이 없는 상태에서 천연두에 걸리게 되는 사람들의 수의 변화량이고, 두번째 항은 천연두에 걸린 적이 없는 상태에서 천연두 이외의 원인에 의해 죽는 사람들의 수의 변화량이다. 또한 이 집단 전체의 사망률(death rate)은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{dn}{dt} = -\nu\beta x - \mu(t)n; \tag{2}$$

   위 식 (2)에서 우변의 첫번째 항은 천연두로 인한 사망률이고 두번째 항은 천연두 이외의 원인에 의한 사망률이다.

   (a) **[30점]** $z = x/n$이라 하고, z가 다음의 initial value problem을 만족함을 보여라.

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - \nu z), \quad z(0) = 1. \tag{3}$$

   (위 initial value problem이 $\mu(t)$와 상관없이 성립함에 주목하라.)

   (b) **[20점]** 위 식 (3)를 풀어 $z(t)$를 구하라.

   (c) **[10점]** 베르누이 측정하여 얻은 값은 $\nu = \beta = 1/8$이다. 이 값들을 이용하여, 나이가 20세인 사람들 중 천연두에 걸린 적이 없는 이들의 수를 구하라. (정확한 계산을 할 수 없을 경우 수식의 형태로 (예: $\sin 30$ 혹은 $\log 7$ 등) 답을 제시하여도 좋다.)

solution

(a)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{n}\right)\\ &= \frac{x'n - xn'}{n^2}\\ &= \frac{(-(\beta+\mu)x)n - x(-\nu\beta x - \mu n)}{n^2}\\ &= \frac{-\beta xn + \nu\beta x^2}{n^2}\\ &= -\beta z + \nu\beta z^2\\ &= -\beta z(1-\nu z)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{dt} = -\beta z(1-\nu z)\\ \rightarrow\quad & \frac{dz}{z(1-\nu z)} = -\beta dt\\ \rightarrow\quad & \left(\frac{1}{z} + \frac{\nu}{1-\nu z}\right) dz = -\beta dt\\ \rightarrow\quad & \log z - \log(1-\nu z) = -\beta t + c_0\\ \rightarrow\quad & \log \frac{z}{1-\nu z} = -\beta t + c_0\\ \rightarrow\quad & \frac{z}{1-\nu z} = c_1 e^{-\beta t} \quad (c_1 = e^{c_0})\\ \rightarrow\quad & z = \frac{c_1 e^{-\beta t}}{1+\nu c_1 e^{-\beta t}} = \frac{1}{c_2 e^{\beta t} + \nu} \quad (c_2 = 1/c_1)\end{aligned}$$

Applying the initial condition $z(0) = 1$, we get $c_2 = 1 - \nu$, therefore,

$$z(t) = \frac{1}{(1-\nu)e^{\beta t} + \nu}$$

(c) Assigning $\nu = \beta = 1/8$ and $t = 20$, we get

$$z(20) = \frac{1}{\frac{7}{8}e^{5/2} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{7e^{5/2}+1} \approx 0.0927.$$

3. **[90점]** 실험으로 관찰한 바에 따르면, 어떤 물체의 표면온도 변화량은 물체의 온도와 주변의 온도의 차에 (특정 비례계수(constant of proportionality) 값에 따라) 비례한다. 이를 뉴튼의 law of cooling라고 한다. 이를 이용해서 범죄현장에서 발견된 시체의 사망시간을 추정할 수 있다.

   (a) **[10점]** 시간이 t일 때의 시체 온도를 $\theta(t)$, 시체가 발견된 방 안의 온도를 T, 그리고 시체 온도 변화량의 비례계수 값을 $-k$라고 할 때 $(k > 0)$ θ에 대한 미분방정식을 세워라. (시체의 온도는 항상 방 안의 온도보다 높고 $(\theta \geq T)$ 시체가 있는 방 안의 온도는 일정하게 유지된다고 가정한다.)

   (b) **[20점]** $t = 0$일 때 시체가 발견되었다고 하자. 이 때 측정한 시체의 온도가 θ_0일 때, 앞에서 구한 미분방정식을 풀어 $\theta(t)$를 구하라. (k 값은 아직 구할 수 없음에 유의하라.)

   (c) **[30점]** 앞에서 구한 식으로는 k 값을 모르기 때문에 아직 사망시간을 추정할 수 없다. k 값을 구하기 위해 시체가 발견된 후 t_1의 시간이 흐른 뒤 시체의 온도를 측정하였더니 θ_1였다. 이를 이용하여 k 값을 구하라. 이 때 k 값은 문제에서 주어진 혹은 앞에서 구한 값들을 이용해 나타내야 한다.

   (d) **[30점]** 사망 시 온도는 상온에서의 체온(θ_d)과 같다는 가정 하에, 사망시간 t_d를 구하라. 이 때 t_d 값은 문제에서 주어진 혹은 앞에서 구한 값들을 이용해 나타내야 한다.

solution

(a)

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T).$$

(b)

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T) \\ \rightarrow \quad & \frac{d\theta}{\theta - T} = -kdt \\ \rightarrow \quad & \log(\theta - T) = -kt + c_0 \\ \rightarrow \quad & \theta = T + c_1 e^{-kt} \quad (c_1 = e^{c_0}). \end{aligned}$$

Applying the initial condition $\theta(0) = \theta_0$, we get $c_1 = \theta_0 - T$ therefore

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt}.$$

(c) Applying $\theta(t_1) = \theta_1$, we obtain

$$\begin{aligned} & \theta_1 = T + (\theta_0 - T)e^{-kt_1} \\ \rightarrow \quad & (\theta_0 - T)e^{-kt_1} = \theta_1 - T \\ \rightarrow \quad & -kt_1 = \log \frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \\ \rightarrow \quad & k = -\frac{1}{t_1} \log \frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}. \end{aligned}$$

(d) Applying $\theta(t_d) = \theta_d$, we get

$$\begin{aligned} & \theta_d = T + (\theta_0 - T)e^{-kt_d} \\ \rightarrow \quad & -kt_d = \log \frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T} \\ \rightarrow \quad & t_d = -\frac{1}{k} \log \frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T} \end{aligned}$$

wherer k is obtained before.